

Türöffner und tragisches Handicap

Zählen ist die wohl fundamentalste Idee der Mathematik.

Text: Kurt Hess

Wenn Kinder routiniert zählen, die Bedeutung des Zählens kennen *und* die dezimale Systematik sinnvoll nutzen, können sie ökonomisch durch die Welt der Zahlen navigieren. Andererseits kennt jede Lehrperson Kinder, die sich nicht vom zählenden Rechnen lösen, Operationen als Zählrezepte verstehen, für deren Umsetzung viel Zeit brauchen und durch (Zähl-)Fehler aufpassen. Bewusstes Zählen ermöglicht also wichtige mathematische Zugänge, kann aber auch ein tragisches Handicap darstellen, wenn Kinder dabei verharren und andere Strategien ignorieren.

Erster Türöffner: Konzept des Abzählens (kardinales Verständnis)

Beim Zählen ist zu unterscheiden, ob lediglich Zahlenamen der Reihe nach aufgesagt werden oder ob eine konkrete Anzahl ermittelt wird. Die meisten vierjährigen Kinder bestimmen Anzahlen, indem sie jedem Element in stabiler Abfolge genau eine Zahl zuordnen (1-zu-1-Korrespondenz) und die letzte als Anzahl angeben (Kardinalzahl: wie viele?). Dieses bewusste Zählen gelingt manchen Kindern schon vor Eintritt in den Kindergarten, während andere noch auf – teilweise langwierige – Spiel- und Lerngelegenheiten angewiesen sind (vgl. Hess, 2021b). Es ist möglich, dass ein Kind zwar zählt, aber nicht weiss, was die letzte Zahl bedeutet. Lou zählt zwar 7 Bälle, antwortet aber auf die Frage, wie viele es seien, mit einem Achselzucken: «5? 2? 6?» Das Mädchen weiss, wie zählen geht, aber nicht, wozu es das brauchen kann. Damit das Zählen mathematisch sinnvoll erfolgen kann, ist der Erwerb weiterer Prinzipien notwendig. Das Abstraktionsprinzip besagt, dass beispielsweise 5 Mäuse und 5 Elefanten gleich viele sind, weil jedes Element genau 1 zählt. Invarianz bedeutet, dass sich eine Anzahl nicht verändert, wenn die gleichen Elemente anders angeordnet werden (Gelman & Gallistel, 1978). Das Abzählen ist also nicht nur eine Trainings Sache, sondern hat wesentlich mit dem Mengenverständnis zu tun (Hess, 2016, 2021a).

Zweiter Türöffner: Mengen vergleichen, verändern und aufteilen

Das Prinzip der 1-zu-1-Korrespondenz zwischen Zahlen und Elementen spiegelt ein fortgeschrittenes Mengenverständnis, weil das Abstraktions- und das Invarianzprinzip darauf gründen: Jedem Element wird genau *eine* Zählzahl zugeordnet. Weder die Grösse noch die Anordnung der Elemente verändern die Anzahl. Die Tragweite solcher Erkenntnisse zeigt sich, wenn junge Kinder ungeordnete Steine zählen, das heisst jeden Stein genau einmal antippen. Verlässliche Strategien bestehen darin, vorgängig eine «Zählstrasse» beziehungsweise eine Steinreihe zu bilden oder die Steine aktiv an einen anderen Ort zu verschieben. Ebenfalls auf der 1-zu-1-Korrespondenz beruhen die Prinzipien des Vergleichens, Veränderns und Aufteilens von Mengen (Resnick, 1989; Hess, 2016, 2019, 2021a).

Das *Vergleichsprinzip* verlangt ein gemeinsames Kriterium, es wird also das «Gleiche im Anderen» gesucht. Die beiden Punktereihen in Abbildung 1 oben können beispielsweise nach dem Kriterium Farbe, Länge oder Anzahl verglichen werden. In Bezug auf die Anzahl lässt sich argumentieren, dass für die 1-zu-1-Korrespondenz genau ein grüner *und* genau ein oranger Punkt fehlen – folglich müssen es gleich viele sein. Im unteren Beispiel könnte einer der beiden rechts überstehenden Punkte nach vorn versetzt werden, sodass die 1-zu-1-Korrespondenz beziehungsweise der weiterhin frei stehende Punkt anzeigt, dass es mehr orange Punkte gibt.

Solche Anzahlvergleiche sind weder einfach noch selbstverständlich. Darauf verwies Hasemann (2006, S. 74) in Zusammenhang mit fünfjährigen Kindern, denen er eine Karte mit zufällig angeordneten Luftballons (Abb. 2, oben) und 4 Karten mit Würfelbildern zeigte (unten). Die Frage lautete: «Welche Karte mit Würfelbildern passt zu den Luftballons?» Die meisten Kinder sagten, die erste Punktekarte passe zu den Ballons, weil beide voll seien. Hasemann interpretiert, dass die Ermittlung der Luftballons eine «geschickte Organisation der Zählprozedur» beziehungsweise eine 1-zu-1-Korrespondenz erfordern würde und die Kinder stattdessen den optischen Eindruck beziehungsweise die beanspruchte Fläche fokussierten.

Des Weiteren besagt das sogenannte *Zunahme-Abnahme-Prinzip*, dass eine Anzahl grösser beziehungsweise kleiner wird, wenn Elemente oder Einheiten dazukommen oder weggenommen werden. Damit verbundene Erkenntnisse hängen ebenfalls mit der 1-zu-1-Korrespondenz zusammen, weil sich die Zu- und Abnahmen weder über eine beanspruchte Fläche noch über die Länge einer Reihe verlässlich bestimmen lassen.

Gleiches gilt schliesslich auch für das Teile-Ganzes-Prinzip, das impliziert, dass sich Mengen unterschiedlich gliedern und zusammensetzen lassen – also zum Beispiel durch eine Gliederung mit der Kraft der 5 (z. B. $8 = 5 + 3$) oder durch das Verdoppeln (z. B. $8 = 4 + 4$).

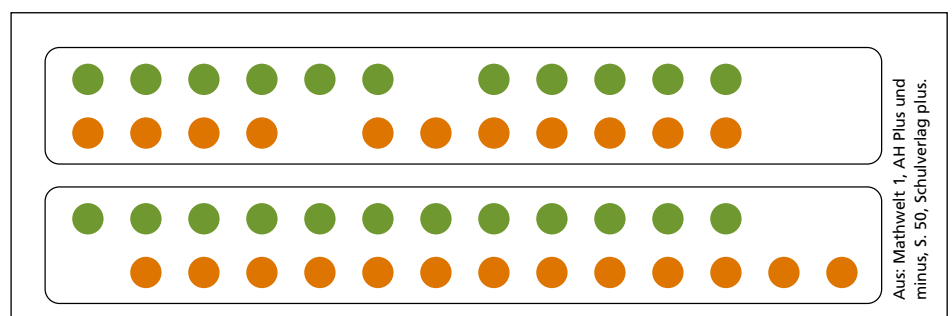


Abbildung 1: 1-zu-1-Korrespondenz als Kriterium für den Mengenvergleich.

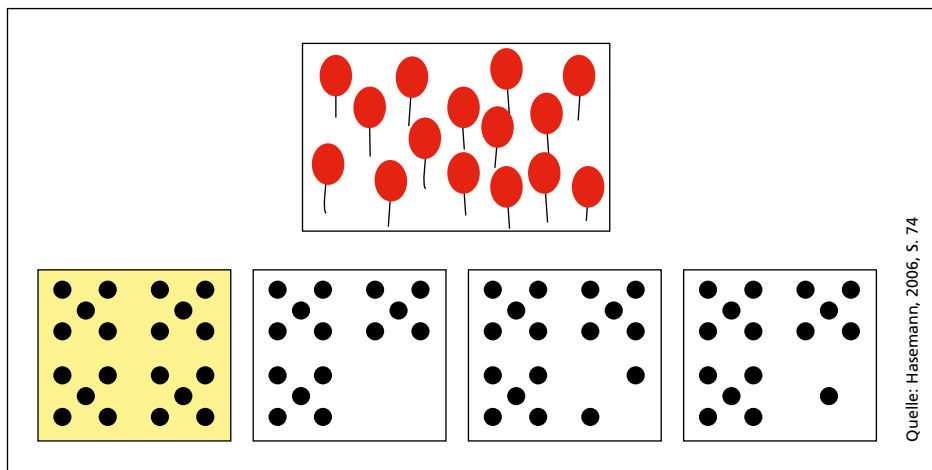


Abbildung 2: 1-zu-1-Korrespondenz als Grundlage des Anzahlvergleichs.

Dritter Türöffner: sich an grösseren Einheiten orientieren

Mathematisch fortgeschrittene Kinder können Anzahlen ökonomisch erfassen und später auch effizient rechnen, wenn sie die Einheit 1 mit einer 5er- und einer 10er-Orientierung kombinieren. Das kann unter anderem mit Übungen zur mentalen Vorstellung von Finger- und Würfelbildern oder Zählstrichen gefördert werden, zum Beispiel, indem die Kinder Anzahlen zwischen 5 und 10 mit 1er-, 2er-, 3er-, 4er-, 5er- und 10er-Punktstreifen legen (Hess, 2018a, b). Solche Handlungen entsprechen der Struktur, die (später) auch beim denkenden Rechnen zu erzeugen ist. $8 + 7$ wird zum Beispiel mit einem 5er- und einem 3er- sowie einem 5er- und einem 2er-Streifen gelegt. Die beiden 5er ergeben einen 10er (Verdoppelung), der 2er und der 3er einen 5er ($7 + 8 = 5 + 5 + 2 + 3 = 15$). Grundvorstellungen und Geläufigkeiten zum Verdoppeln/Halbieren und zur Kraft

der 5 entsprechen wichtigen Voraussetzungen für die Anwendung nicht zählender Rechenstrategien (vgl. Hess, 2018b).

Vierter Türöffner: Konzept des verbalen Zählens (ordinales Verständnis)

Neben den genannten Kompetenzen zum Abzählen von Elementen ist auch ein flexibles verbales Zählen anzustreben (Fuson, 1988), also von jeder Zahl aus vor- und rückwärts, später vielleicht in 2er-, 5er- und 10er-Schritten. Auch dieser verbale Akt des ordinalen Zählens (jede Zahl hat ihre Position und ihren Namen als Zählzahl) unterliegt einem Entwicklungsprozess. Dieser beginnt bei einer ganzheitlichen Zahlwortreihe (ähnlich einem Singen, bei dem die einzelnen Zahlnamen in einer Melodie verschmelzen) und führt zum verbalen Zählen, wie es Erwachsene tun. Das flexible Zählen macht den Anschein, als sei es

«lediglich» eine Sache des Automatisierens. Dass der Schein trügt, lässt sich spätestens erahnen, wenn Kinder über 10er oder 100er hinweg vor- oder rückwärts zählen, zum Beispiel «102, 101, 100, 90, 80, oder 57, 58, 90, 91, 92», und dabei 10er und 1er durcheinanderbringen.

Ein analoges Unvermögen ist festzustellen, wenn Kinder Positionen auf dem ordinalen Zahlenstrahl einschätzen, also beispielsweise auf einer Skala mit Marken bei 0, 50, 100, 150 und 200 Zahlen wie 15 oder 105 eintragen sollen. Das Konzept des verbalen Zählens bedient also ebenso und massgeblich auch die ersten drei mathematischen Türöffner.

Zählen als tragisches Handicap

Die Unterscheidung zwischen dem kardinalen und dem ordinalen Zahlenaspekt gelingt manchen Kindern mit mathematischen Lernschwierigkeiten nicht. Sie verstehen Rechnungen als Zählrezepte, sie lösen sämtliche Operationen ordinal und verhaften bei Zählprozeduren. Es fehlt ihnen die Möglichkeit und häufig auch das Selbstvertrauen, sich an grösseren Einheiten zu orientieren. Dies hängt sowohl mit eingeschränkten Zählkompetenzen beziehungsweise einem bescheidenen Mengenverständnis zusammen, aber auch damit, dass sie strukturierte (kardinale) Punkte-, Finger- und Würfelbilder oder Zählstriche ablehnen und sich nicht an 5ern und 10ern orientieren. Sie suchen weniger nach Übersicht und Eleganz, sondern zählen in stereotyper Art und Weise, manche bis in eine Sackgasse namens Dyskalkulie. Es bräuchte also frühe und gezielte, inklusive und exklusive Lernanlässe und einen Unterricht, der frühe Signale erkennt und mit entsprechenden Unterstützungsmassnahmen reagiert.

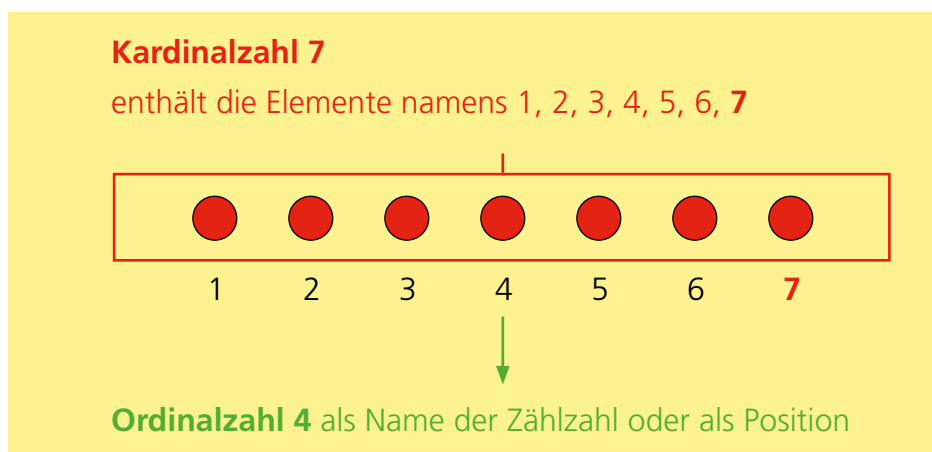


Abbildung 3: Unterscheidung zwischen Kardinal- und Ordinalzahl.

Prof. Dr. Kurt Hess

leitet die Professur Mathematisches Denken und Lernen, ein gleichnamiges Kompetenzzentrum und einen CAS-Studiengang zum Thema Rechenschwierigkeiten an der Pädagogischen Hochschule Zug. Er ist Autor von «Mathwelt 1» und zahlreicher Publikationen zum mathematischen Lernen im 1. Zyklus.

>>> Literatur  <<<